Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\frac{2}{3} \\ u_{n+1} & = & -\frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.

Solution

1. $u_1 = \frac{7}{2}$ et $u_2 = -\frac{11}{4}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = -\frac{3}{2} v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $-\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{5}{3}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -\frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -\frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n + 1$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\frac{5}{3} \\ u_{n+1} & = & 5u_n - \frac{4}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -\frac{29}{3}$ et $u_2 = -\frac{149}{3}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = 5v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = -2$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -2 \times 5^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -2 \times 5^n + \frac{1}{3}$$
3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$$
car $5 > 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -1 \\ u_{n+1} & = & \frac{5}{2}u_n - 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \frac{4}{3}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -\frac{9}{2}$ et $u_2 = -\frac{53}{4}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{5}{2} v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $\frac{5}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{7}{3}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -\frac{7}{3} \times \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -\frac{7}{3} \times \left(\frac{5}{2}\right)^n + \frac{4}{3}$$

3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$$
car $\frac{5}{2} > 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & -\frac{5}{3}u_n + \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \frac{3}{16}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.

Solution

1. $u_1 = -\frac{7}{6}$ et $u_2 = \frac{22}{9}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = -\frac{5}{3} v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $-\frac{5}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{13}{16}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{13}{16} \times \left(-\frac{5}{3}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{13}{16} \times \left(-\frac{5}{3}\right)^n + \frac{3}{16}$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= -2 \\ u_{n+1} &= -4u_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{1}{5}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.

Solution

1. $u_1 = 7$ et $u_2 = -29$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = -4v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison -4 et de premier terme $v_0 = -\frac{9}{5}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -\frac{9}{5} \times (-4)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -\frac{9}{5} \times (-4)^n - \frac{1}{5}$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & 3u_n + 5 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{5}{2}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = \frac{13}{2}$ et $u_2 = \frac{49}{2}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = 3v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 3$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = 3 \times 3^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 3 \times 3^n - \frac{5}{2}$$
3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$$
car $3 > 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & -\frac{2}{3}u_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{3}{5}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -\frac{2}{3}$ et $u_2 = -\frac{5}{9}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = -\frac{2}{3} v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{10}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{1}{10} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{1}{10} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{3}{5}$$

3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$$
car $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{3}{5}$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\frac{4}{3} \\ u_{n+1} & = & \frac{5}{2}u_n + \frac{1}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{2}{9}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -3$ et $u_2 = -\frac{43}{6}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{5}{2} v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $\frac{5}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{10}{9}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -\frac{10}{9} \times \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -\frac{10}{9} \times \left(\frac{5}{2}\right)^n - \frac{2}{9}$$

3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$$
car $\frac{5}{2} > 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\frac{5}{3} \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}u_n + 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 8$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = \frac{19}{6}$ et $u_2 = \frac{67}{12}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{29}{3}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -\frac{29}{3} \times 2^{-n}$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -\frac{29}{3} \times 2^{-n} + 8$$
3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$$
car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 8$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= -2u_n - \frac{2}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{2}{9}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.

Solution

1. $u_1 = -\frac{20}{3}$ et $u_2 = \frac{38}{3}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = -2v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = \frac{29}{9}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{29}{9} \times (-2)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{29}{9} \times (-2)^n - \frac{2}{9}$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -1 \\ u_{n+1} & = & 3u_n - 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -5$ et $u_2 = -17$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = 3v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -2$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -2 \times 3^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -2 \times 3^n + 1$$
3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$$
car $3 > 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\frac{3}{2} \\ u_{n+1} & = & \frac{3}{2}u_n - 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -\frac{13}{4}$ et $u_2 = -\frac{47}{8}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{7}{2}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -\frac{7}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 2$$
3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$
car $\frac{3}{2} > 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & -\frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{4}{5}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -2$ et $u_2 = 0$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $-\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{9}{5}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{9}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{9}{5} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4}{5}$$
3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$$
car $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{4}{5}$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= -5 \\ u_{n+1} &= -5u_n - \frac{5}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{5}{18}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.

Solution

1. $u_1 = \frac{70}{3}$ et $u_2 = -\frac{355}{3}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = -5v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison -5 et de premier terme $v_0 = -\frac{85}{18}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = -\frac{85}{18} \times (-5)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = -\frac{85}{18} \times (-5)^n - \frac{5}{18}$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & -\frac{1}{3}u_n - 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{9}{4}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = -\frac{17}{6}$ et $u_2 = -\frac{37}{18}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{7}{4}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{7}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{7}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{4}$$

3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$$
car $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\frac{9}{4}$$

Étude d'une suite numérique

Sujet

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \frac{3}{2}u_n + \frac{5}{3} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

1. Calculez u_1 et u_2.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + \frac{10}{3}$.
   a) Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.
   b) Déduisez-en l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Exprimez u_n en fonction de n.
3. Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution

1. $u_1 = \frac{37}{6}$ et $u_2 = \frac{131}{12}$.
2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n$$
donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{19}{3}$.

   b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{19}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

   c) Du résultat précédent on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{19}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{10}{3}$$
3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$
car $\frac{3}{2} > 1$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$