Problèmes ouverts, narrations de recherche, tâches complexes et créativité mathématique.

Fiche 2 - Humour au second degré

1)* Déterminer trois entiers consécutifs dont la somme est égale à leur produit.

2) Dans un cercle de rayon 4cm peut-on inscrire un triangle AMB isocèle de sommet principal M tel que MA soit le double de AB ?

3)* Sur la planète Terre, la valeur d'une pièce de Saturne est proportionnelle au carré de sa masse. Tout à l'étonnement de ses découvertes, Micromégas a cassé en deux le beau spécimen qu'il rapportait. Le plus honnête lapidaire de saurait désormais lui donner que 25 écus alors qu'il pouvait en escompter 32 pour la pierre intacte. Comment la pierre est-elle fragmentée ?

4) $P(x) = 6 + 10x + 2x^2 - 2x^3$

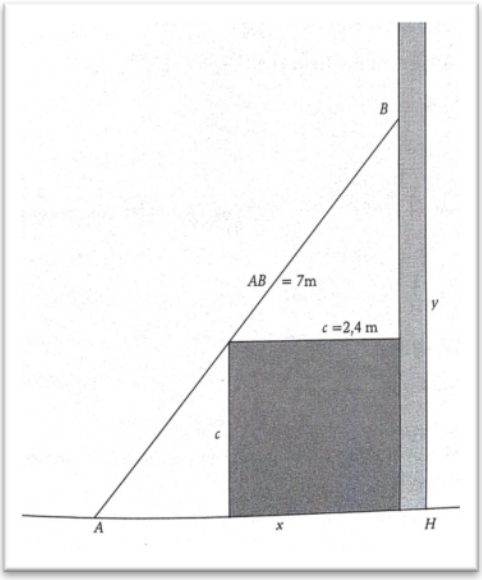
Calculer $P(-1)$ et expliquer pourquoi P(x) peut se factoriser par $(x + 1)$.

Déterminer les trois réels a, b, c tels que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ en développant cette expression, en la réduisant et en identifiant les coefficients indéterminés littéraux aux coefficients numériques de P(x). Résoudre $P(x) > 0$.

Factoriser $P'(x) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5$ puis résoudre $\frac{P(x)}{P'(x)} \leq 0$

5) Les problèmes concrets, c'est vraiment plus facile…

Une échelle de longueur 7 m s'appuie contre un mur et sur l'arête d'un bloc cubique de coté 2,4m. On cherche la distance du pied du mur au pied de l'échelle. On désigne par x cette distance et par y celle du pied du mur au haut de l'échelle.



Montrer qu'il faut résoudre le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 49 \\ \frac{y-2,4}{y} = \frac{2,4}{x} \end{cases}$

Montrer que ce système est équivalent au système suivant :

$\begin{cases} S^2 - 2P = 49 \\ P - 2,4S = 0 \end{cases}$ où $S = x + y$ et $P = xy$

Conclure.

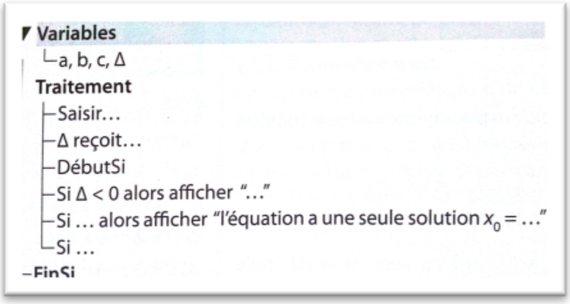
6) Type Olympiades

Où faut-il couper une ficelle d'un mètre de long pour former avec l'un des morceaux un carré et avec l'autre un triangle équilatéral de telle façon que la somme de leurs aires soit minimale.

7)* Programmer un algorithme

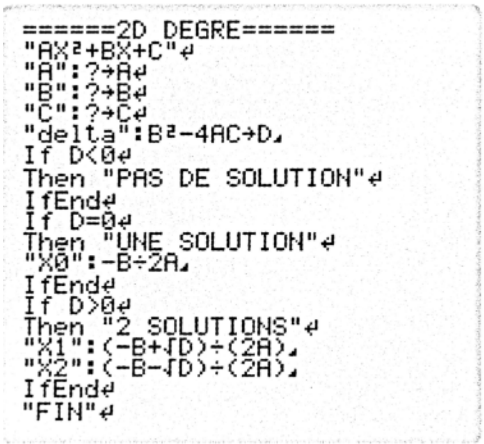
Compléter l'algorithme ci-contre dont l'objectif est de résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Programmez l'un des deux algorithmes pour résoudre les équations suivantes et modifiez ce programme pour afficher un message d'erreur lorsque la valeur a=0 est saisie.



```
Variables
  a, b, c, Δ
Traitement
  Saisir…
  Δ reçoit…
  DébutSi
  Si Δ < 0 alors afficher "…"
  Si … alors afficher "l'équation a une seule solution x0 = …"
  Si …
FinSi
```

```
PROGRAM:SDDEGRE
:EffEcr
:Disp "AX²+BX+C"
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA",D▸F
:If D<0:Then
:Disp "PAS DE SOLUTION"
:End
:If D=0:Then
:Disp "X0",-B/(2A)▸Frac
:End
:If D>0:Then
:Disp "2 SOLUTIONS"
:Disp "X1",(-B+√(D))/(2A)▸Frac
:Disp "X2",(-B-√(D))/(2A)▸Frac
:End
```



```
======2D DEGRE======
"AX²+BX+C"↵
"A":?→A↵
"B":?→B↵
"C":?→C↵
"delta":B²-4AC→D◢
If D<0↵
Then "PAS DE SOLUTION"↵
IfEnd↵
If D=0↵
Then "UNE SOLUTION"↵
"X0":-B÷2A◢
IfEnd↵
If D>0↵
Then "2 SOLUTIONS"↵
"X1":(-B+√D)÷(2A)◢
"X2":(-B-√D)÷(2A)◢
IfEnd↵
"FIN"↵
```

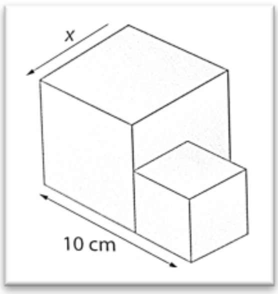
▶ $2x^2 + 4x + 1 = 0$

▶ $-x^2 + x + 1 = 0$

▶ $-\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{25}{2} = 0$

▶ $-\frac{1}{3}x^2 - 2x - 5 = 0$

8)* Les deux cubes sont tels que la somme des mesures de leurs côtés est égale à dix centimètres. On note x la mesure du côté de l'un d'entre eux. Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme des volumes des deux cubes est minimale.

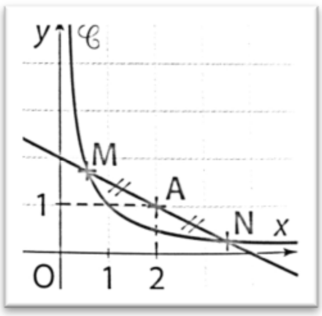


9) Pourquoi le trinôme $ax^2 + x - a$ ($a \neq 0$) possède-t-il deux racines distinctes ?

Déterminer les valeur du réel m pour lesquelles l'équation $2x^2 + mx + 2 = 0$ n'admet pas de solution.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation $y = 1{,}9x + 8{,}4$ et de la parabole d'équation $y = x^2$.

10)* $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec x>0. M et N sont deux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives m et n. Calculez la valeur exacte de m et n lorsque A est le milieu du segment [MN].



11)* Une coccinelle à l'état larvaire ou adulte se nourrit de pucerons. Les coccinelles sont donc parfois utilisées dans la lutte biologique contre les pucerons. Ayant observé la population de coccinelles dans un jardin pendant plusieurs années, on a constaté que si x désigne le nombre de centaines de coccinelles présentes une année avec $0 \leq x \leq 1$, le nombre de coccinelles dans ce même jardin l'année suivante est $f(x) = 2{,}8x(1-x)$.

Dresser le tableau de variations et tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f dans un repère orthonormé.

En 2012 on dénombre 10 coccinelles. Utiliser le graphique pour conjecturer le nombre de coccinelles les années suivantes. Vérifier les résultats par le calcul.

Déterminer le nombre de coccinelles tel que la population reste stable l'année suivante.

Combien doit-on avoir de coccinelles pour en avoir au moins 20 de plus l'année suivante ?

12) La tablette Plimpton 322 est une tablette d'argile découverte en Irak, en partie cassée, large de 13 cm haute de 9 cm et épaisse de 2 cm. On fixe la date de rédaction au XVIIIème siècle avant J.-C. Cette tablette consiste en un tableau de nombres cunéiformes. Selon une interprétation, elle pourrait décrire une méthode de résolution d'une équation de la forme $x - \frac{1}{x} = c$ avec c un réel.

$v_1 = \frac{c}{2}$, $v_2 = v_1^2$, $v_3 = 1 + v_2$, $v_4 = \sqrt{v_3}$.

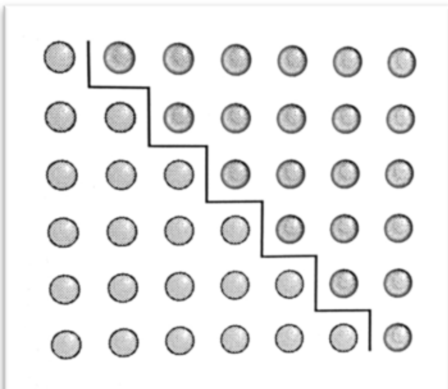
Une solution est alors donnée par $x = v_4 + v_1$.

Justifier la validité de cette solution.

13) Soit a un réel non nul. On considère les paraboles d'équations $y = ax^2 + x + 1$. On note I_a les sommets de ces paraboles. Utiliser Géogebra en créant un curseur pour faire varier a et conjecturer la nature de l'ensemble des points I_a en affichant la trace des sommets I_a . Retrouver ce résultat par le calcul.

14)

Expliquez.



$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

15) N voitures numérotées $1,2,3,\ldots,N$ sont engagées pour une course. Au dernier moment une voiture tombe en panne et ne prend pas le départ. On sait que la somme des numéros des voitures ayant pris le départ est 260.

L'objectif est de déterminer N et le numéro de la voiture manquante.

Avant de poursuivre, il serait préférable de noter l'existence de la formule de l'exercice précédent….

Montrer que N doit être solution de $\frac{1}{2}N(N+1)-N\leq 260$ et de $\frac{1}{2}N(N+1)-1\geq 260$.

Résoudre ces deux inéquations et répondre au problème initial.

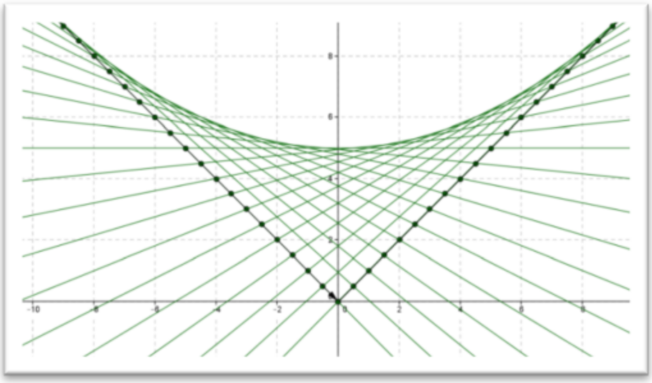
16) Dans Geogebra créer 4 points nommés C, D, E et F. Créer les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{EF}$.

Saisir les instructions suivantes dans le champ de saisie :

A=Séquence[C+i*u/20,i,0,20]

B=Séquence[E+i*v/20,i,0,20]

Séquence[Droite[Elément[A,i], Elément[B,i]],i,1,21]



Expliquer ce que fait cette suite d'instructions.

Modifier les positions de C, D, E et F. Que constate-t-on quand les droites (CD) et (EF) sont parallèles ? Et dans le cas contraire ?

Dans le cas où les droites ne sont pas parallèles, conjecturer la nature de la courbe qui apparait « au bord » du réseau formé par les droites.

Se placer dans la configuration particulière suivante :

C(-10 ;10), D(0 ;0), E(0 ;0) et F(10,10)

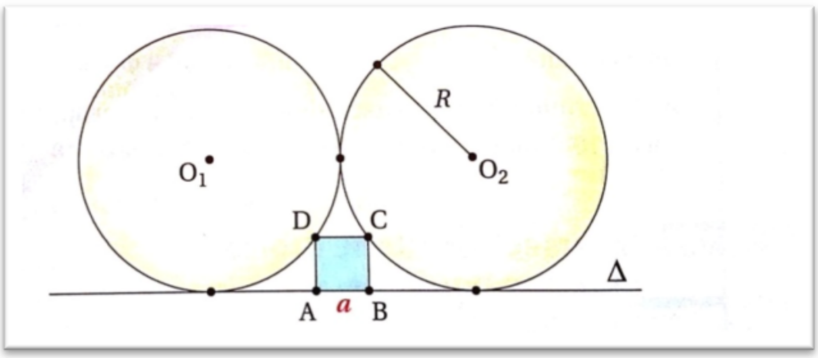
Créer un curseur a pouvant varier de -0,5 à 0,5 par incrément de 0,01.

Entrer dans le champ de saisie : $\mathbf{f(x)=a*x^2+5}$

En supposant que la courbe enveloppe soit une parabole de sommet S(0,5), déterminer la valeur du coefficient a telle que la courbe représentative de f soit la courbe cherchée et conclure.

17) Sangaku

Les sangaku sont des énigmes japonaises peintes sur des tablettes de bois puis accrochées. En voici un exemple… à résoudre.



Exprimer a en fonction de R.

18)* Le triangle de côtés 4, 5 et 6 n'est pas rectangle. Peut-on ajouter une même longueur à chacun de ses côtés pour qu'il le devienne ?

19) Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $P(x+1) - P(x) = 2x$ et $P(0) = 0$.
En déduire la somme des n premiers entiers pairs non nuls $S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ puis la somme des n premiers entiers.

20)* La somme de deux trinômes du second degré est-elle un trinôme du second degré ?
Un trinôme du second degré peut-il toujours s'écrire comme la somme de deux trinômes du second degré ?

21) Le produit de quatre entiers consécutifs augmenté de 1 est-il toujours un carré parfait ?